

INFLUENCE OF SLOSHING IN WING TIP TANKS ON THE VIBRATION NATURAL  
MODES OF AN AIRCRAFT

by Roger VALID and Roger OHAYON

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA)  
92320 Châtillon (France)

SUMMARY

The vibration natural modes of an aircraft may be modified by the movements of liquids contained in wing tip tanks. These modifications may render critical, as regards flutter, some modes that would not have been had not these movements been taken into account. A calculation method is proposed for predicting this influence in a reasonably simple manner.

This method is based either on the fluid finite element method and the use of a selective criterion to introduce the actually perturbing sloshing modes, or on the use of a step-by-step method in which only the perturbation acting on previously chosen modes is calculated.

INFLUENCE DU BALLOTTEMENT DANS LES RESERVOIRS DES BOUTS D'AILES  
SUR LES MODES PROPRES DE VIBRATION D'UN AVION

par R. Valid et R. Ohayon

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA)  
92320 Châtillon - France

Résumé

Les modes propres de vibration d'un avion peuvent être modifiés par les mouvements des liquides contenus dans des réservoirs de bouts d'ailes. Ces modifications peuvent rendre critiques au flottement des modes qui ne le sont pas quand on ignore ces mouvements. On propose une méthode de calcul permettant de prévoir cette influence d'une manière économique.

Cette méthode est basée soit sur la méthode des éléments finis fluides et l'utilisation d'un critère de sélection pour introduire les modes de ballottement effectivement perturbateurs, soit l'utilisation d'une méthode pas à pas où seule la perturbation engendrée sur les modes choisis initialement est calculée.

Introduction

Les véhicules marins, aériens ou spatiaux comportent des réservoirs remplis, ou partiellement remplis, de liquides de diverses natures, dont les mouvements internes peuvent être la cause de phénomènes nocifs ou dangereux. Ces phénomènes de type vibratoire peuvent compromettre la mission même de ces véhicules soit en provoquant des instabilités, soit des résonances parasites, sources de fatigue, soit encore des surcharges occasionnelles dangereuses pour la solidité de la structure.

Dans les avions les ballottements de carburant dans certains réservoirs modifient le comportement vibratoire de la structure et peuvent rendre critiques au flottement certains modes de vibration.

Ces divers phénomènes doivent être étudiés soigneusement et dans certains cas des remèdes efficaces peuvent être utilisés. L'un des plus classiques est l'emploi de baffles fixes ou mobiles, ou de flotteurs antibalottement, qui dissipent de l'énergie et empêchent les mouvements de liquides de grande amplitude. Cependant des considérations de poids, de protection, ou de construction, interdisent souvent l'usage de tels remèdes. Ce peut être le cas des avions militaires munis de réservoirs de bouts d'ailes aussi légers que possible et largables.

Le plus souvent l'étude des mouvements liquide-structure peut être faite dans l'hypothèse de linéarisation, mais l'étude des problèmes non-linéaires, absolument essentielle, reste en grande partie ouverte.

Un certain nombre de travaux ont été consacrés ainsi au cas des petits mouvements, dont l'étude est suffisante pour la prédiction des instabilités à leur naissance. Citons les travaux théoriques de Moiseev, Romyantsev, Petrov, Rapoport, Friedman, et Boujot (1 - 6), ainsi qu'une étude de synthèse d'Abramson (7). Un certain nombre de méthodes plus ou moins approchées et spécialisées par Bleich, Coale, Archer et Rubin, Khabbaz, Tong et Luk (8 - 13). Enfin Valid et al puis Anquez et al ont proposé récemment une méthode par éléments finis fluides très générale applicable aux lanceurs spatiaux et aux satellites (15 - 17), tandis qu'Anquez publiait une méthode de calcul de l'amortissement des modes dans le cas de liquides faiblement visqueux (14).

Nous nous proposons dans ce qui suit de montrer comment cette méthode peut être appliquée à la recherche des modifications entraînées par les déplacements des liquides dans le comportement vibratoire de structures d'avions militaires munis de réservoirs de carburant en bout d'ailes.

1 - Principe général de la méthode

Le calcul des modes propres de liquide dans un réservoir de forme quelconque repose sur la méthode des éléments finis fluides. Le réservoir est supposé rigide ou non et le liquide est supposé parfait et incompressible.

Dans une première étape l'ensemble du problème est mis sous une forme variationnelle. Une deuxième étape consiste en une discrétisation du problème par la méthode des éléments finis et aboutit à une écriture matricielle dans laquelle les inconnues généralisées représentent d'une part les mouvements de la structure et d'autre part les mouvements du liquide.

L'équation obtenue est une équation matricielle aux valeurs propres dont le nombre de modes propres est en principe considérable, mais le problème pratique est en fait de savoir comment sont modifiés les modes propres de la structure proprement dite, par exemple liquide figé, par le ballottement du liquide. Pour ce faire on décompose dans une troisième étape la représentation matricielle en deux parties, l'une concernant les mouvements de structure liquide figé,

et l'autre son complément exact, la deuxième sera alors considérée comme une perturbation plus ou moins grande de la première.

Une méthode de perturbation successive permet alors de ne calculer les modifications apportées par le déplacement du liquide que sur les seuls modes de structure choisis à l'avance parmi les modes supposés critiques, à l'exclusion des autres.

Une variante peut être utilisée si l'on calcule indépendamment les modes propres de liquide et de bidons. On peut alors sélectionner par une méthode de perturbation ceux qui seraient à introduire dans un calcul complet comprenant la structure et les bidons.

## 2 - Principe variationnel pour les mouvements irrotationnels du liquide

On rappellera tout d'abord la formulation variationnelle du problème des mouvements irrotationnels d'un liquide parfait compressible contenu dans un récipient souple de forme quelconque et soumis à l'accélération de la pesanteur (15, 16).

On démontre aisément le principe variationnel suivant :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Sigma_2} \rho \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{g} \cdot U \right] \bar{n} \delta U d\Sigma = 0, \forall \bar{n} \delta U \in L^2(\Sigma_2) \\ \int_{\Omega_s} \left[ T_{\alpha} (C \delta D) + \rho_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial t^2} \delta U_s \right] d\Omega + \int_{\Sigma_m} \rho \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{g} \cdot U \right] \bar{n} \delta U_s = 0, \forall \delta U_s \in [H^1(\Omega_s)]^3 \\ \int_{\Omega_f} \rho \overline{\text{grad} \varphi} \text{grad} \delta \varphi d\Omega - \int_{\Sigma_2} \rho \bar{n} \frac{\partial U}{\partial t} \delta \varphi d\Sigma - \int_{\Sigma_m} \rho \bar{n} \frac{\partial U_s}{\partial t} \delta \varphi d\Sigma = 0, \forall \delta \varphi \in H^1(\Omega_f) \\ \text{avec } \delta D = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \delta U_s}{\partial M} + \overline{\frac{\partial \delta U_s}{\partial M}} \right] \end{array} \right.$$

et des conditions initiales données.

Dans (1)  $\vec{g}$  est le vecteur accélération de la pesanteur ;  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $U$  sont respectivement la masse spécifique, le potentiel des vitesses et le déplacement du liquide au point  $M$  du domaine  $\Omega_f$  de frontière  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_m \cdot \Sigma_2$  et  $\Sigma_m$  représentent la surface libre et la surface mouillée du récipient ;  $\bar{n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega_f$  en un point d'une surface quelconque.

La structure occupe un domaine  $\Omega_s$  ;  $U_s$  est le déplacement de la structure dans  $\Omega_s$  ou sur  $\Sigma_m$ .  $C$  et  $D$  représentent respectivement la contrainte et la déformation dans  $\Omega_s$  et  $\rho_s$  la masse spécifique de la structure.

$H^1(\Omega_f)$  et  $H^1(\Omega_s)$  sont des espaces de Sobolev d'ordre 1 (espaces de fonctions de carré sommable ainsi que leurs dérivées-distributions). La barre désigne la transposition.

Dans (1) les fonctionnelles sont symétriques à l'exception du terme  $-\rho \bar{U} \vec{g} \cdot \bar{n} \delta U_s$  qui sera remplacé par sa partie symétrique, le calcul montrant que sa composante antisymétrique est négligeable. Dans ce cas le principe (1) conduira à des matrices symétriques par discrétisation.

A ce sujet indiquons dès maintenant que si l'on se contente des mouvements irrotationnels du liquide la formulation (1) permet de résoudre le problème en utilisant une méthode de discrétisation du type méthode de Ritz associée à une méthode de sous-structure, ou directement par une méthode d'éléments finis appliquée à l'ensemble de la structure et du fluide.

Mais on peut aussi plus économiquement combiner ces deux méthodes, c'est-à-dire représenter les mouvements de la structure par une méthode de Ritz et les mouvements du liquide par une méthode d'éléments finis.

Plus précisément supposons pour simplifier les réservoirs rigides et les mouvements de la structure, composée des réservoirs et de l'avion, représentés par une combinaison linéaire d'un certain nombre de ses modes propres (à l'exclusion des modes d'ensemble). On pourra remplacer dans (1) le déplacement  $U_s$  par cette combinaison linéaire, soit :

$$(2) U_s = S_s(M) q_s(t), \quad q_s(t) \in \mathbb{R}^n$$

Les inconnues  $U$  et  $\varphi$  relatives au liquide seront alors représentées par leurs valeurs modales après discrétisation, soit par exemple :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \varphi = S_f(M) q_f(t), \quad q_f \in \mathbb{R}^{n_f} \\ U = \frac{\partial \varphi}{\partial M} \end{array} \right.$$

En remplaçant dans (1)  $U_s$ ,  $\varphi$  et  $U$  par leurs valeurs on obtient une équation matricielle aux valeurs propres du type

$$[K - \omega^2 M] q = 0$$

où l'on a cherché des solutions harmoniques de pulsation  $\omega$ . Ou encore

$$\left[ \begin{array}{cc} {}^1K_1 & {}^1K_2 \\ \overline{{}^1K_2} & {}^2K_2 \end{array} \right] - \omega^2 \left[ \begin{array}{cc} {}^1M_1 & {}^1M_2 \\ {}^1M_2 & {}^2M_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} q_s \\ q_f \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité  $K_1$  en particulier provient des intégrales

$$\int_{\Omega_s} T_r (c \delta D) d\Omega - \int_{\Sigma_m} \rho \bar{g} U \bar{n} \delta U_s d\Sigma$$

tandis que la matrice de masse  $M_1$  provient de l'intégrale

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial t^2} \delta U_s d\Omega$$

et si les modes de structure sont effectivement des modes propres de vibration la première et la troisième de ces intégrales fournissent des matrices diagonales. Les matrices de couplage se calculent aisément dans (1) et proviennent d'intégrales où figurent à la fois  $\varphi$  et  $U_s$ .

### 3 - Horizontalité de la surface libre moyenne

Supposons que la structure soit constituée d'un avion muni de réservoirs de bouts d'ailes supposés rigides pour simplifier et partiellement remplis de liquides.

Dans le principe (1) le vecteur  $U_s$  des intégrales dans  $\Omega_s$  et  $\Sigma_s$  sera remplacé par le paramètre  $q_s$ , par exemple, par l'intermédiaire de (2) comme on l'a dit au paragraphe précédent, par contre les déplacements des bidons dans les intégrales effectuées sur  $\Sigma_m$  seront en fait des déplacements de pompage  $\zeta$  et de rotation  $\theta$  autour d'un axe par exemple orthogonal au plan de symétrie de l'avion. Ces déplacements seront des combinaisons linéaires de ces mêmes valeurs dans chaque mode propre de l'avion ; soit pour un bidon

$$(4) \begin{bmatrix} \zeta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_{n_1} \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{s1}(t) \\ q_{s2}(t) \\ \vdots \\ q_{sn_1} \end{bmatrix}$$

On constate que dans un tel mouvement la surface libre du liquide n'est pas affectée par un déplacement vertical  $\zeta$ , par contre une rotation  $\theta$  du bidon aura tendance à laisser la surface libre horizontale. Pour généraliser et compléter les mouvements possibles du liquide on aura donc intérêt à introduire des mouvements (de surface libre), non irrotationnels puisque ceux-ci sont déjà introduits par l'intermédiaire du potentiel  $\varphi$ , et respectant l'incompressibilité. Ces mouvements peuvent se décomposer en deux parties : une rotation d'ensemble du plan de la surface libre et des mouvements autour de ce mouvement moyen.

Cependant pour distinguer dans un calcul les résultats dus au cas fictif, facilement calculable, où le liquide est supposé figé, du cas où il ne l'est pas, on supposera la surface libre animée d'une rotation d'ensemble du bidon, soit  $\theta$ , liquide figé, et d'une rotation moyenne  $\alpha$  autour du même axe soit  $Oy$ . Ce mouvement est bien isochorique et rotationnel.

On va démontrer qu'en fait  $\alpha = -\theta$  et par conséquent que la surface libre moyenne reste horizontale.

En effet on démontre que le principe (1) peut être retrouvé par application du principe d'Hamilton après linéarisation (15, 16). Il est donc loisible d'ajouter au principe une action hamiltonienne due à des mouvements supplémentaires, par exemple rotationnels, et ici de surface libre caractérisés par le paramètre  $\alpha$ .

Soient  $T_f$  et  $W_f$  les énergies cinétique et potentielle du fluide :

$$\begin{cases} T_f = \int_{\Omega_f} \frac{1}{2} \rho \bar{M} \dot{M} d\Omega \\ W_f = \int_{\Omega_f} -\rho \bar{g} M d\Omega \\ M \in \Omega_f = \Omega + \Omega_1 - \Omega_2 \text{ (voir fig. 1)} \quad M = O\bar{M} \end{cases}$$

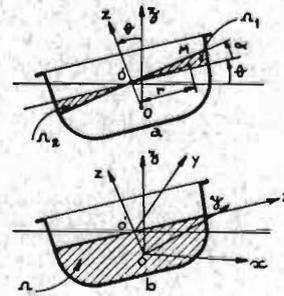


Fig1 Schéma d'un réservoir rigide montrant la rotation de la surface libre a) liquide non figé b) liquide figé

$M$  étant exprimé en fonction de  $\alpha$ ,  $\zeta$ , et  $\theta$ , ces deux derniers paramètres étant remplacés ensuite par le deuxième membre de (4)

On trouve alors pour un bidon

$$(5) \begin{cases} \delta T_f = \ddot{\zeta} \delta \zeta M_f + \ddot{\theta} \delta \theta I_y \\ \text{avec (4)} \end{cases}$$

Dans (5)  $M_f$  est la masse totale du liquide et  $I_y$  l'inertie de rotation du liquide figé.

$$(6) \begin{cases} \delta W_f = g \left[ \bar{z}_G M_f \theta \delta \theta + [\alpha \delta \alpha + \theta \delta \alpha + \alpha \delta \theta] J_y \right] \\ \text{avec } J_y = 2 \rho \int_0^l \frac{x^3(y)}{3} dy \\ \text{et } \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{s1}(t) \\ q_{s2}(t) \\ \vdots \\ q_{sn_1}(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Dans (6)  $z_{G_0}$  est la cote du centre de gravité du liquide au repos par rapport à l'axe de rotation, et  $r(\gamma)$  la distance du plan de symétrie du bidon au point du bord de la surface libre d'ordonnée  $\gamma$  sur ce même plan.

On pourrait naturellement introduire d'autres mouvements isochoriques rotationnels du liquide, mais on se bornera à celui caractérisé par le paramètre  $\alpha$  en première approximation.

Remarquons alors que les termes d'énergie potentielle en  $\delta\alpha$ , soit

$$g J_y [\alpha + \theta] \delta\alpha$$

n'ayant pas leurs correspondants en termes d'inertie, et de plus le principe (1) ne fournissant aucun terme en  $\delta\alpha$  évidemment, on aura automatiquement la relation suivante :

$$\alpha + \theta = 0$$

ce qui s'explique aisément pour un liquide parfait incompressible ; la surface libre reste donc horizontale en moyenne, aux mouvements irrotationnels près. La démonstration précédente n'est pas inutile, comme on le verra, à cause du terme en  $\alpha \delta\theta$

#### 4 - Principe du calcul par la méthode des éléments finis

On va montrer dans ce paragraphe comment procéder à l'introduction des mouvements irrotationnels, dans le cas de réservoirs de forme quelconque, par la méthode des éléments finis au moyen du principe (1).

Pour cela on établit un certain nombre de types d'éléments finis fluides en procédant comme dans la méthode classique, c'est-à-dire en décomposant le liquide en un certain nombre d'éléments finis et en représentant chaque champ inconnu dans le liquide au moyen d'interpolations polynomiales en fonction des variables d'espace, c'est-à-dire par une méthode de Ritz par morceaux.

On distinguera trois domaines à savoir  $\Omega_f$ ,  $\Sigma_\rho$  et  $\Sigma_m$

1. Dans  $\Omega_f$  on considère des éléments tridimensionnels en forme de parallélépipèdes rectangles dans lesquels l'interpolation sera quadratique. Afin de tenir compte de la forme a priori quelconque des parois intérieures des réservoirs on utilise des éléments tridimensionnels dérivés des premiers et isoparamétriques (18).
2. Sur  $\Sigma_\rho$  le champ  $\bar{n}U$  sera interpolé linéairement ce qui est compatible avec les éléments tridimensionnels.
3. Sur  $\Sigma_m$  les valeurs de  $\varphi$  se déduisent de celles des éléments tridimensionnels adjacents.

Pour le champ  $U_s$  concernant la structure et les réservoirs, deux cas se présentent selon que les réservoirs sont supposés rigides ou souples. Dans le premier cas  $U_s$  se représente simplement au moyen de (2). Sur chaque face des éléments de liquide compo-

sant  $\Sigma_m$  les intégrales s'écrivent et se calculent en fonction des valeurs de  $\varphi$  aux noeuds et de  $q_s$ . Dans le deuxième cas la coque est elle-même décomposée en éléments finis souples pour lesquels il y a lieu de distinguer les déplacements d'ensemble des bidons, donnés par (2), et les déplacements dus aux déformations des bidons, lesquels s'écrivent en fonction des déplacements relatifs de noeuds des bidons. Nous ne développerons pas ce cas ici.

Par contre dans le premier cas (bidons rigides) le calcul de (1) aboutit à l'écriture matricielle suivante correspondant à (1) :

$$(7) \left[ \begin{array}{ccc|ccc} {}^1K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1M_3 \\ 0 & {}^2K_2 & 0 & 0 & {}^2M_2 & {}^2M_3 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{{}^1M_3} & \overline{{}^2M_3} & {}^3M_3 \end{array} \right] \begin{array}{c} Z \\ q_s \\ \phi \end{array} = 0$$

Dans cette écriture la sous-colonne  $Z$  correspond aux valeurs nodales de  $\bar{n}U$ , déplacement du liquide sur  $\Sigma_\rho$ ,  $q_s$  est la sous-colonne d'ordre  $n_1$  des déplacements généralisés de l'ensemble de la structure, et  $\phi$  est la sous-colonne correspondant aux valeurs de  $\varphi$  dans  $\Omega_f$  et sur  $\Sigma_m$

On a cherché en fait des solutions harmoniques en  $e^{i\omega t}$  pour  $Z$  et  $q_s$  et en  $j\omega e^{i\omega t}$  pour  $\phi$  dont le gradient représente une vitesse.

De plus il y a lieu de remarquer que la formulation (1) tient compte ipso facto de l'assemblage fluide-coque par les termes de couplage et que les noeuds de coque et de fluide sont à assembler séparément.

Conformément au paragraphe précédent, dans lequel on a distingué une variable supplémentaire de surface libre  $\alpha$ , cette écriture (7) devient en fait :

$$(8) \left[ \begin{array}{ccc|ccc} {}^1K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1M_3 & 0 \\ 0 & {}^2K_2 & 0 & {}^2K_4 & 0 & {}^2M_2 & {}^2M_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{{}^1M_3} & \overline{{}^2M_3} & {}^3M_3 & 0 \\ 0 & \overline{{}^2K_4} & 0 & {}^4K_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} Z \\ q_s \\ \phi \\ \alpha \end{array} = 0$$

Dans (8) les sous-matrices supplémentaires  ${}^2K_4$  et  ${}^4K_4$  proviennent de (6) ( ${}^4K_4$  est d'ailleurs un scalaire).

Nous ne reviendrons pas sur l'élimination des modes à fréquence nulle qui a été expliqué en (15). Indiquons seulement que les seules valeurs nodales indépendantes de  $\phi$  sont les valeurs aux frontières du domaine liquide, à cause de l'incompressibilité, et que par conséquent les valeurs intérieures s'éliminent.

Nous rappelons que la quatrième équation de (8)

$$\overline{{}^2K_4} q_s + {}^4K_4 \alpha = 0$$

où  $\overline{{}^2K_4}$  est une ligne de scalaires d'ordre  $n_1$  provient de (6)<sub>1</sub> et fournit la relation

$$\alpha = -\theta$$

qui démontre l'horizontalité de la surface libre moyenne et permet d'éliminer la variable  $\alpha$ . (8) devient alors :

$$\begin{bmatrix} {}^1K_1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^2K_2 & -\frac{{}^2K_4 \overline{{}^2K_4}}{{}^4K_4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^1M_3 \\ 0 & {}^2M_2 & {}^2M_3 \\ {}^1M_3 & {}^2M_3 & {}^3M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ q_s \\ \phi \end{bmatrix} = 0$$

(9)

Nous allons voir au paragraphe suivant comment utiliser l'équation (8) d'une manière économique.

### 5 - Sélection par la méthode des perturbations

Le problème concret qui se pose est en fait le calcul des modifications entraînées par la présence du ballonnement dans les caractéristiques dynamiques de la structure. Le comportement dynamique de la structure sera supposé calculé liquide figé, et nous ne considérerons ici que le cas pratique des réservoirs rigides. Dans le cas où ces caractéristiques vibratoires seraient obtenues d'une manière expérimentale sans liquide (ou réservoirs pleins) il est toujours possible par un calcul simple d'en déduire les caractéristiques modales dans le cas de réservoirs partiellement remplis de liquides figés.

Considérons l'équation (9). On ne cherchera pas à calculer l'ensemble des modes extrêmement nombreux, dans une bande de fréquence donnée, de cette équation aux vibrations, si l'on peut éviter de le faire, d'autant qu'il est clair que seul un certain nombre d'entre eux auront une influence effective sur le comportement vibratoire de l'avion.

En fait on peut faire le calcul d'une manière plus sélective et plus économique. En effet les matrices de (9) peuvent se décomposer en deux parties en mettant en évidence celles qui sont relatives à l'ensemble de la structure liquide figé, et celles qui concernent la perturbation apportée par les mouvements du liquide, soit :

$$(10) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^2K_2' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^2M_2' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} {}^1K_1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^2K_2 - {}^2K_2' - \frac{{}^2K_4 \overline{{}^2K_4}}{{}^4K_4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^1M_3 \\ 0 & {}^2M_2 - {}^2M_2' & {}^2M_3 \\ {}^1M_3 & {}^2M_3 & {}^3M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ q_s \\ \phi \end{bmatrix} = 0$$

Dans (10) une partie de la sous-matrice  ${}^2K_2'$  provient du terme en  $\theta \delta \theta$  de (6) et une partie de  ${}^2M_2'$  provient de (5), ces quantités exprimant la participation du liquide supposé figé.

On considère donc une équation initiale et une équation perturbée, soit

$$(11) [K_0 + \Delta K - \omega^2 [M_0 + \Delta M]] q = 0$$

Soit  $q_0$  un mode supposé critique de l'équation initiale et  $\omega_0$  sa pulsation propre :

$$[K_0 - \omega_0^2 M_0] q_0 = 0$$

Une méthode classique de perturbation (19) permet de trouver la modification de  $q_0$  et  $\omega_0$  si la perturbation est suffisamment faible pour justifier la linéarisation au premier ordre. On trouve alors aisément :

$$(12) \Delta [\omega^2] = \frac{\bar{q}_0 [\Delta K - \omega_0^2 \Delta M] q_0}{\bar{q}_0 M_0 q_0}$$

et l'on peut calculer  $\Delta q_0$  dès lors que les autres modes initiaux sont connus. Si la perturbation est importante le calcul peut se faire pas à pas (20), en affectant dans (11) les matrices  $\Delta K$  et  $\Delta M$  d'un coefficient  $\gamma$  variant de 0 à 1 par incréments

tres petits. Il convient naturellement de tenir compte au préalable de la troisième équation (10) qui constitue une liaison entre les variables  $Z, q_s$  et  $\phi$

Une autre méthode moins directe consiste à appliquer une méthode de sous-structure : on calcule d'abord les modes propres de bidon plus liquide, le bidon pouvant subir des mouvements d'ensemble  $\zeta$  et  $\theta$ , et l'on utilise ces modes dans une méthode ritzienne, en les associant aux modes propres de la structure pour effectuer le calcul final. Mais le nombre de modes propres de la première catégorie étant considérable et leur calcul n'étant pas de surcroît d'une précision absolue, on ne retiendra que ceux qui apportent une variation de valeur propre suffisante, supérieure à un pourcentage donné à l'avance, par rapport à la valeur initiale et donc telle que tout mode apportant une perturbation inférieure à ce critère puisse être considéré comme sans influence. Pour connaître cette perturbation de fréquence on utilisera la formule (12). Pour les modes éliminés la linéarisation sera ainsi justifiée et la perturbation correctement calculée.

De plus une fois choisis par (12) les modes conservés et injectés dans (9) il ne sera pas nécessaire de faire le calcul complet, il suffira d'appliquer la méthode de perturbations successives précédente pour connaître la modification apportée par les mouvements du liquide à des modes choisis initialement. Cette méthode plus analytique permettrait de choisir efficacement des remèdes.

#### 6 - Application à un cas simple

Considérons, à titre d'exemple le cas d'un réservoir de forme parallélépipédique rectangle rempli d'un liquide et animé d'un mouvement de translation verticale et de rotation autour d'un axe horizontal, mouvements pour lesquels on suppose des rappels élastiques découplés.

Les axes et dimensions sont indiqués sur la figure 2. L'origine des axes est au centre du réservoir et l'on suppose l'axe de rotation en  $oy$

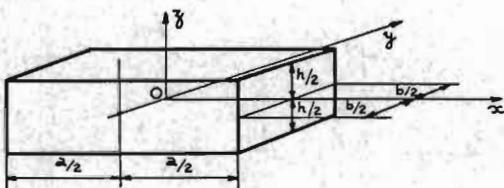


Fig.2 Schéma d'un réservoir parallélépipédique

On appliquera la deuxième méthode indiquée, c'est-à-dire la méthode ritzienne, en calculant au préalable les modes propres de ballottement.

$$\text{Posant } \varphi = j \omega e^{j\omega t} \varphi^*$$

on trouve aisément la base suivante pour les mouvements irrotationnels

$$\varphi^* = \sum_{p=0}^{\infty} \left[ A_p \operatorname{ch} \frac{p\pi}{a} z + B_p \operatorname{sh} \frac{p\pi}{a} z \right] \cos \frac{p\pi}{a} \left[ x + \frac{a}{2} \right] + \sum_{pq} C_{pq} \operatorname{ch} \gamma_{pq} \left[ z + \frac{h}{2} \right] \cos \frac{p\pi}{a} \left[ x + \frac{a}{2} \right] \cos \frac{q\pi}{b} \left[ y + \frac{b}{2} \right] + \theta x z + \zeta z$$

avec

$$\frac{p^2 \pi^2}{a^2} + \frac{q^2 \pi^2}{b^2} = \gamma_{pq}^2$$

Calculons d'abord les termes en  $\theta \delta \theta$  et  $\zeta \delta \zeta$  des diverses intégrales de (1) relatifs à ces modes. Il vient

$$-\int_{\Sigma_2} \rho \bar{q} u \bar{n} \delta u d\Sigma - \int_{\Sigma_m} \bar{q} n \rho \bar{n} u_s \delta u_s d\Sigma = 0$$

$$\int_{\Sigma_2} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \bar{n} \delta u d\Sigma - \int_{\Sigma_2} \rho \bar{n} \frac{\partial u}{\partial t} \delta \varphi d\Sigma = 0$$

$$\int_{\Sigma_m} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \bar{n} \delta u_s d\Sigma - \int_{\Sigma_m} \rho \bar{n} \frac{\partial u_s}{\partial t} \delta \varphi d\Sigma = 0$$

$$\int_{\Omega_f} \rho \operatorname{grad} \bar{\varphi} \operatorname{grad} \delta \varphi d\Omega = -\omega^2 \rho \left[ \frac{abh}{12} [a^2 + h^2] \theta \delta \theta + abh \zeta \delta \zeta \right]$$

La contribution en énergie potentielle due au paramètre  $\alpha$  de la formule (6), avec  $\alpha = -\theta$ , est égale à

$$- \rho g \frac{b a^3}{12} \theta \delta \theta$$

La participation énergétique due au liquide figé est donné par (5) et est égale à

$$- \omega^2 \rho \left[ \frac{abh}{12} [a^2 + h^2] \theta \delta \theta + abh \zeta \delta \zeta \right]$$

L'énergie potentielle étant nulle ici car  $\gamma_{s0} = 0$  (voir formule (6)).

Supposons d'abord nul les termes  $A, B, C$  de liquide, appelons  $\gamma$  et  $\mu$  les matrices diagonales de rigidité et d'inertie du récipient, et introduisons

seulement le paramètre  $\alpha$  de liquide, il vient l'équation

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mu_1 + \rho abh & 0 \\ 0 & \mu_2 + \frac{\rho abh}{12} [a^2 + h^2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -g\rho \frac{b\alpha^3}{12} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \theta \end{bmatrix} = 0$$

traduisant l'équation (10).

Adoptons par exemple les valeurs suivantes pour un récipient en dural raidi et pour de l'eau :

$$\begin{aligned} \mu_2 &= 80 \text{ m}^2\text{K}, \quad f_s = 10 \text{ Hz}, \quad \rho = 10^3 \text{ alors} \\ \gamma_2 &= 320, \quad \omega_0^2 = 184 \end{aligned}$$

Calculons avec ces valeurs la perturbation de valeur propre relative au mode de rotation initiale liquide figé. Il vient avec (12)

$$\Delta[\omega^2] = -7,65 \text{ et } \left| \frac{\Delta[\omega^2]}{\omega_0^2} \right| = 0,0415$$

ce qui fournirait une variation de fréquence d'environ 2 % due à la conservation de l'horizontalité de la surface libre moyenne.

De plus si l'on calcule les termes de couplage relatif aux modes en  $C_{pq}$  du liquide, on constate que ces termes sont nuls. Le calcul complet donne alors pour ces modes les équations :

$$\left[ \rho g V_{pq}^2 \frac{ab}{4} \text{Sh}^2(V_{pq} h) - \omega^2 \rho V_{pq} \frac{ab}{8} \text{Sh}(V_{pq} h) \right] \times C_{pq} = 0, \quad (p, q \neq 0)$$

ce qui donne des pulsations propres telles que

$$\omega_{pq}^2 = g V_{pq} \text{Th}(V_{pq} h)$$

et par conséquent conformes à celles que l'on trouve directement pour un réservoir fixe.

Calculons enfin la contribution due aux modes en  $A_p$  et  $B_p$  du liquide, et contentons-nous d'évaluer leur influence sur le mode de rotation du récipient par rapport au cas liquide figé.

La formule (12) indique que seul le terme diagonal de la deuxième équation du système, en  $\theta$ , participe à la modification de fréquence. Pour calculer la perturbation de ce terme il convient de tenir compte de la troisième équation (9) qui est une équation de liaison entre les paramètres de structure, ici  $\gamma$  et  $\theta$ , et les paramètres de liquide ici  $A_p$  et  $B_p$ .

A cause des découplages cette troisième équation se réduit à deux équations en  $A_p$  et  $B_p$ . Le calcul donne pour  $p$  impair

$$\begin{cases} A_p \text{Sh}\left(\frac{p\pi}{a} \frac{h}{2}\right) + B_p \text{Ch}\left(\frac{p\pi}{a} \frac{h}{2}\right) + 4\theta \frac{a^2}{[p\pi]^3} = 0 \\ -A_p \text{Sh}\left(\frac{p\pi}{a} \frac{h}{2}\right) + B_p \text{Ch}\left(\frac{p\pi}{a} \frac{h}{2}\right) - 4\theta \frac{a^2}{[p\pi]^3} = 0 \end{cases} \begin{matrix} p \\ \text{impair} \end{matrix}$$

ce qui donne

$$B_p = 0$$

$$A_p = -4\theta \frac{a^2}{[p\pi]^3} \frac{1}{\text{Sh}\left(\frac{p\pi}{a} \frac{h}{2}\right)}$$

On trouve ensuite pour  $p$  pair :  $A_p = B_p = 0$

Supposons alors que l'on recherche les valeurs de  $p$  au-dessus desquelles la contribution des modes d'indice  $p$  sur le mode de rotation est négligeable, telle par exemple que la perturbation  $\frac{\Delta[\omega^2]}{\omega_0^2} \leq \mathcal{E}$  il vient par (12), après avoir reporté cette valeur de  $A_p$  dans la deuxième équation (10) relative à  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta[\omega^2]}{\omega_0^2} = -\frac{\Delta M}{M_0} &= 8\rho b a^4 \frac{1}{[p\pi]^5} \frac{1}{\text{Th}\left(\frac{p\pi}{a} \frac{h}{2}\right)} \times \\ &\times \frac{1}{\mu_2 + \frac{\rho abh}{12} [a^2 + h^2]} \leq \mathcal{E} \end{aligned}$$

On trouve pour les valeurs numériques proposées :

$$[p\pi]^5 \geq [p\pi]^5 \text{Th}\left(\frac{p\pi}{a} \frac{h}{2}\right) \geq \frac{147}{\mathcal{E}}$$

Et si par exemple  $\mathcal{E} = 0,01$ , cela donne

$$p \geq 2,16$$

Comme  $p$  est impair cela signifie qu'il est inutile d'introduire dans le calcul final des modes d'indice supérieur à 3, ces derniers apportant chacun une modification de fréquence inférieure à 0,5 %.

## 6 - Conclusion

Dans le cas de réservoirs de forme quelconque il est évidemment impossible de calculer les mouvements des liquides sans effectuer une discrétisation du problème. La méthode des éléments finis que nous avons proposée permet de trouver les modes propres de vibration linéarisés avec le maximum d'efficacité et de précision dans des cas très généraux, y compris celui des réservoirs souples de forme quelconque. Cette méthode a été employée avec succès pour des réservoirs axisymétriques tels que ceux de lanceurs spatiaux ou de satellites. Elle est en cours de programmation dans le cas général.

Néanmoins l'application de cette méthode ou de toute autre, comme on l'a vu, conduit à de très nombreux modes propres de liquide, ou de l'ensemble liquide-structure ; leur influence sur les modes de structure, par exemple liquide figé, est inconnue a priori et peut conduire à de nombreux calculs inutiles et de plus insuffisamment précis.

Aussi a-t-on proposé un critère de sélection. Cependant ce critère, basé sur la perturbation en fréquence peut être trompeur car l'influence du mouvement des liquides peut se manifester sur les déformées sans être pour autant appréciable sur les fréquences propres.

On pourrait alors utiliser un autre critère de sélection basé sur les normes matricielles, mais il serait beaucoup plus coûteux. On recommande plutôt la première méthode proposée, c'est-à-dire le calcul direct de la perturbation apportée sur les modes critiques par une méthode pas à pas relativement économique.

## Références

- (1) Moiseev N.N., Rumyantsev - Dynamic stability of bodies containing liquids. Applied Physics and Engineering, Springer Verlag (1968).
- (2) Moiseev N.N. - Introduction to the theory of oscillations of bodies containing liquids. Advances in Applied Mechanics, Vol. 8 (1964).
- (3) Moiseev N.N. and Petrov A.A. The calculation of free oscillations of a liquid in a motionless container. Advances Applied Mechanics, Vol. 9 (1966).
- (4) Rapoport I.M. - Dynamic of elastic container partially filled with liquid. Applied Physics and Engineering, Springer Verlag (1968).
- (5) Friedman - Equations of water waves. Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 17, n° 2 (Août 1967).
- (6) Boujot J. - Sur l'analyse des caractéristiques vibratoires d'un liquide contenu dans un réservoir. Journal de Mécanique Paris (1972).
- (7) Abramson N. - The dynamic behavior of liquids in moving containers. NASA SP, 106 (1966).
- (8) Bleich H.H. - Longitudinal forced vibrations of cylindrical fuel tanks. Jet Propulsion. Journal of the American Rocket Society, Vol. 6, n° 2 (Feb. 1956).
- (9) Coale C.W. - Axisymmetric vibrations of a cylindrical hemispherical tank partially filled with a liquid. AIAA Journal, Vol. 7, n° 2 (Feb. 1969).
- (10) Archer J.S. and Rubin C.P. - Improved analytical longitudinal response analysis for axisymmetric launch vehicles, Vol. 1 - ANSA CR 345 (1965).
- (11) Khabbaz G.R. - Dynamic behavior of liquids in elastic tanks. L.M.S.C. 60-80-70-23 (August 1970). (Lockheed Missiles and Space Company, Palo Alto, California).
- (12) Pin-Tong - Liquid sloshing in a elastic container. California Institute of Technology. Pasadena Californie (1966).
- (13) Luk C.H. - Finite element analysis for liquid sloshing problems. M.I.T. (1969), AFOSR 69 - 1504 TR, ASRL TR 144-3.
- (14) Anquez L. - Damping of vibrations of a weakly viscous fluid contained in a tank. 24 th International Astronautical Federation Congress Baku (URSS) (Oct. 1973).
- (15) Valid R., Ohayon R et Berger H. Le calcul des réservoirs élastiques partiellement remplis de liquides, pour la prévision de l'effet POGO. 23 rd International Astronautical Federation Congress - Vienne (Autriche) (8 - 15 Octobre 1972).
- (16) Anquez L., Berger H., Ohayon R. and Valid R. Vibrations of tanks partially filled with liquids. Symposium International sur l'application des méthodes d'éléments finis aux problèmes d'écoulements. Swansea (Grande-Bretagne) (7 - 11 Janvier 1974).
- (17) Berger H., Boujot J. et Ohayon R. - Un problème spectral en mécanique des vibrations : calcul des réservoirs élastiques partiellement remplis de liquide. A paraître dans le Journal of Mathematical Analysis.
- (18) Zienkiewicz O.C. - The finite element method in engineering science. Mc Graw Hill (1971).
- (19) Courant R. and Hilbert D. - Methods of mathematical physics, Vol. 1. Interscience Publishers, Inc. (New York 1953).
- (20) Valid R. - Calcul sélectif de l'influence de grandes modifications structurales sur les modes propres d'une structure linéaire. Recherche Aérospatiale n° 1971-6 (Nov.Déc.) pp 359-364.

D I S C U S S I O N

A. Unger (Israel Aircraft Industries, Ben-Gurion Airport, Israel): Was the theory presented here approved experimentally?

R. Valid and R. Ohayon: No, this theory has not been verified yet, but the Society "Avions Marcel Dassault-Brequet Aviation" is going to make laboratory tests in collaboration with the "Institut de Mechanique des Fluids de Lille", with tanks of simple shape, in order to see the importance of this interaction and to evaluate the numerical predictions as soon as they will be obtained.